результате хрупкий скелет аэрогеля разрушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vignes A. *Diffusion in binary solutions* // I&EC Fundamentals. – 1966. – V. 5. – No 2. – P. 189–199.

2. Garcia-Gonzalez C. A., Camino-Rey M. C., Alnaef M., Zetzl C., Smirnova I. *Supercritical drying of aerogels using CO_2: Effect of extraction time on the end material textural properties* // J. Supercrit. Fluids. – 2012. – V. 66. – P. 297–306.

Л. А. Салахова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
SalakhovaLA@gmail.com

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ЕВКЛИДОВЫХ ГРАНИЧНЫХ МОМЕНТОВ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть G – односвязная область на плоскости, $\rho(z,G)$ – расстояние от точки z до границы области G и $P(G)$ – жесткость кручения области G, т. е.

$$P(G) := 2\iint_G u(x,y)\,dxdy,$$

где $u = u(x,y)$ – решение уравнения Пуассона $\triangle u = -2$ с граничным условием $u|_{\partial G} = 0$.

Рассмотрим геометрический функционал

$$I_q(G) = 2\iint_G \rho(z,G)^q\,dxdy,$$

являющийся евклидовым моментом области G относительно ее границы порядка q.

Ф. Г. Авхадиевым [1] была доказана двусторонняя оценка для функционала жесткости кручения:

$$I_2(G) \leqslant P(G) \leqslant 64 I_2(G).$$

Некоторое обобщение этого неравенства на n-мерный случай было доказано в [2] для областей, удовлетворяющих строгому условию Харди.

Е. Макаи [3] для выпуклых областей доказал неравенство:

$$P(G) < \frac{4}{3} A(G) \rho(G)^2,$$

где $\rho(G) := \sup\{\rho(z, G) : z \in G\}$, $A(G)$ – площадь области G.

Получение аналогичных неравенств для евклидовых граничных моментов в трехмерном случае является основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть D – выпуклое тело конечного объема $V(D)$ и $q \geqslant 0$, тогда*

$$I_q(D) \leqslant \frac{\rho(D)^q V(D)}{q+1} - \frac{4}{3} \frac{q(q+5)\pi \rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)},$$

$$I_q(D) \geqslant \frac{S(\rho(D))\rho(D)^{q+1}}{q+1} + \frac{8\pi \rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)},$$

где $S(\rho(D))$ – площадь поверхности уровня, которая находится на расстоянии $\rho(D)$ от поверхности тела D.

Теорема 2. *Пусть D – выпуклое тело и $q \geqslant 1$, тогда*

$$I_q(D) \leqslant \frac{2 I_1(D) \rho(D)^{q+1}}{q+1} - \frac{2}{3} \frac{(q-1)(q+6)\pi \rho(D)^{q+3}}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

Экстремальной областью для полученных неравенств является шар, предполагается, что она не единственна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен–Венана* // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.

2. Banuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion* // J. London Math. Soc. – 2002. – V. 66. – P. 499–512.

3. Makai E. *On the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam* // Studies in Math. Analysis and Related Topics. – Stanford Univ. Press, 1962. – P. 227–231.

К. А. Самсонова

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского,

kris_ruzhik@mail.ru

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА

Пусть функция $w = f(z,t)$, $z \in \mathbb{H}$, $t \geqslant 0$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, имеет в окрестности бесконечно удаленной точки представление

$$f(z,t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty,$$

отображает $\mathbb{H} \setminus K_t$, $K_t \subset \mathbb{H}$, на $\mathbb{H}$ и является решением обыкновенного дифференциального уравнения Левнера для верхней полуплоскости

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \lambda(t)}, \quad f(z,0) = z, \quad z \in \mathbb{H}, \qquad (1)$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t)$.